

УДК 534.113

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕДУР ПОИСКА РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ

© 2001 г. М. Ю. Двоешерстов, В. А. Савин, В. И. Чередник

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603600 Н. Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: sva@rf.unn.runnet.ru

Поступила в редакцию 27.11.2000 г.

Проанализированы различные методы поиска глобального экстремума целевой функции (ЦФ) многих переменных для расчета характеристик поверхностных акустических волн (ПАВ) и вытекающих поверхностных акустических волн (ВПАВ) в кристаллах. Рассмотрены процедуры поиска оптимальных ориентаций в кристаллах для ПАВ. Проведен сравнительный анализ перспективных методов поиска глобального экстремума ЦФ.

Одной из характерных особенностей в технике применения ПАВ является та, что перед конструированием архитектуры какого-либо устройства на таких волнах (генератор, линия задержки, фильтр и т.д.) необходимо сначала найти в пространстве пьезокристалла ориентацию, в которой возможно их распространение с оптимальными характеристиками. Как известно [1], под оптимальными характеристиками ПАВ и ВПАВ подразумеваются следующие: термостабильность в широком интервале рабочих температур ТКЧ, высокий коэффициент электромеханической связи  $K^2$ , малый угол между направлениями групповой и фазовой скоростями  $\rho\alpha$ , малые дифракционные потери, характеризующиеся коэффициентом анизотропии ( $\gamma = -1$ ). В случае ВПАВ необходимо также иметь низкий декремент затухания  $\delta$  вдоль направления распространения волны. Для определения параметров волны  $K^2$ ,  $\rho\alpha$ ,  $\gamma$ , ТКЧ, как известно, необходимо прежде всего найти фазовую скорость волны  $V$  и декремент затухания  $\delta$ .

Для нахождения  $V$  и  $\delta$ , а также поиска оптимальной ориентации для ПАВ и ВПАВ в пространстве пьезокристалла можно привлечь различные процедуры поиска глобального экстремума многомерной ЦФ [2–7]. При этом значение ЦФ зависит от трех углов Эйлера  $f_1, f_2, f_3$  [8], описывающих срез кристалла и направление распространения волны, а также от величины материальных констант пьезокристалла. Параметрами ЦФ при этом являются скорость волны  $V$  и декремент затухания  $\delta$ . В свою очередь нахождение экстремума ЦФ с точки зрения оптимальных характеристик ПАВ, ВПАВ представляет собой отдельную сложную вычислительную задачу поиска экстремума ЦФ по многим параметрам [9–10].

Цель настоящей работы – провести сравнительный анализ нескольких методов поиска глобального экстремума функции многих переменных для решения указанных задач.

Воспользуемся анализом уравнений, описывающих распространение акустической волны в пьезокристалле [1]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} - e_{klj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} &= 0 \\ e_{ikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $C_{ijkl}, e_{ikl}, \varepsilon_{ik}$  – материальные константы пьезокристалла,  $u_i$  – механические смещения,  $\varphi$  – потенциал,  $\rho$  – плотность подложки,  $t$  – время,  $x_j$  – координаты. Индексы  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .

Для расчета характеристик ПАВ и ВПАВ, распространяющихся на свободной поверхности пьезокристалла, требуется решить систему уравнений (1), сформулированные для анизотропной пьезоэлектрической среды. При наличии на поверхности пьезокристалла пленки конечной толщины, необходимо решать задачу о распространении ПАВ в структуре: слой – пьезоподложка. При этом имеются две системы уравнений (1), одно из которых относится к материалу пленки, другое – к материалу подложки. Как в первом, так и во втором случае уравнения, описывающие распространение волны не могут быть решены аналитически и требуют привлечения численных методов.

Совместив ось  $x_1$  с направлением распространения волны вдоль поверхности (ось  $x_3$  – нормаль к поверхности), искомые решения в пространстве

пьезокристалла для амплитуд смещений и потенциала можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_j &= \alpha_i \exp(jk\beta x_3) \exp\{jk[(1+i\delta)x_1 - Vt]\}, \\ \varphi &= \alpha_4 \exp(jk\beta x_3) \exp\{jk[(1+i\delta)x_1 - Vt]\}, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $k = \omega/V$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота. Первые экспоненты в (2) описывают убывание амплитуды вдоль направления –  $x_3$  с коэффициентами затухания  $\beta$ , определяемые их мнимыми частями,  $\alpha_1, \alpha_4$  – неизвестные амплитудные множители.

Подстановка (2) в (1) приводит к системе дисперсионных уравнений, представляющих собой однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин  $\beta$  для заданных значений  $V$  и  $\delta$ . Далее, необходимо воспользоваться граничными условиями на механически и электрически свободной поверхности кристалла [1]: равенство нулю нормальных компонент тензора напряжений  $T_{3i}$  и непрерывность нормальной компоненты электрического смещения  $D_3$ . В результате получится система однородных комплексных уравнений, имеющая нетривиальное решение только в том случае, если определитель этой системы, зависящий от скорости  $V$  и коэффициента  $\delta$ , равен нулю:

$$F(V, \delta) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $F(V, \delta)$  – определитель или функция граничных условий. В произвольном случае  $F(V, \delta)$  является комплексной функцией двух действительных переменных  $V$  и  $\delta$ . В соответствии с уравнением (3) следует найти такие значения  $V$  и  $\delta$ , для которых одновременно обращаются в нуль действительная и мнимая части функции  $F(V, \delta)$ . При этом функция граничных условий  $F(V, \delta)$  принимается за ЦФ. Для решения уравнения (3) в работе применяется целый ряд различных процедур поиска глобального экстремума функции многих переменных. Отыскивается глобальный экстремум (нулевой минимум) ЦФ, представляющей собой квадрат абсолютной величины комплексной функции  $F(V, \delta)$ . Заметим, что в случае поиска ПАВ решения ( $\delta = 0$ ) требуется минимизировать функцию одной переменной  $|F(V)|^2$ , для расчета ВПАВ необходимо минимизировать функцию двух переменных  $|F(V, \delta)|^2$ .

Наиболее известные процедуры поиска глобального экстремума ЦФ можно классифицировать по следующей схеме [5]:

- методы перехода из одного локального минимума в другой;
- методы случайного поиска;
- методы, основанные на статистических моделях ЦФ;
- методы покрытий;

– методы неполного направленного сканирования области поиска.

Основная проблема создания эффективных процедур глобального поиска связана с необходимостью оценки чрезвычайно большого числа вариантов. Общеизвестно [5], что ни один из поисковых методов не обладает по отношению к другим такими преимуществами, которые позволяли бы считать его универсальным средством решения любых задач. Кроме того, общее количество вычислений ЦФ, требуемое для определения координат точки экстремума для большинства процедур глобального поиска растет как степенная функция размерности области поиска.

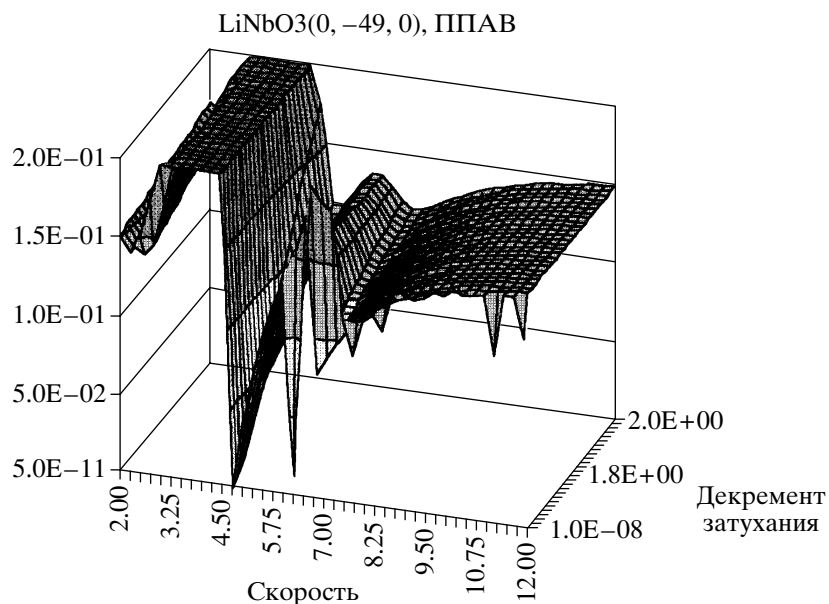
Для решения сложных оптимизационных задач требуются такие поисковые процедуры, которые обладали бы следующей совокупностью необходимых свойств:

- высокая надежность поиска экстремума;
- возможно меньшая чувствительность к характеру рельефа ЦФ, включая овражные ситуации, участки малого наклона и локально-экстремальные участки;
- работоспособность в пространстве высокой размерности;
- минимум настраиваемых параметров;
- низкие затраты на поиск.

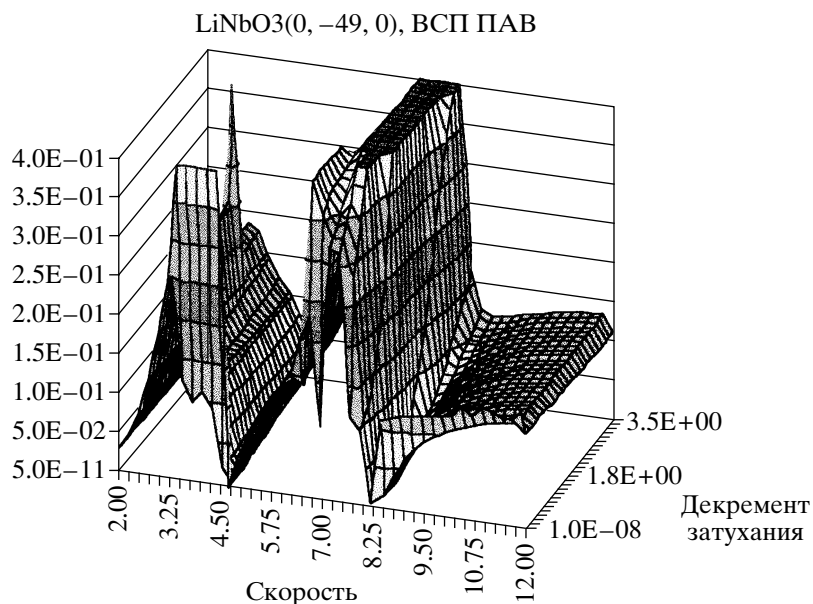
Данная совокупность свойств поисковых процедур в значительной степени противоречива и, поэтому, трудновыполнима.

Как известно, ВПАВ затухают вдоль направления распространения  $x_1$  на поверхности ( $\delta > 0$ ) в отличие от ПАВ. Существует два типа ВПАВ [9]: псевдоповерхностные акустические волны (ППАВ) и высокоскоростные псевдоповерхностные акустические волны (ВСППАВ). ЦФ в области поиска решений для ПАВ и ВПАВ почти всегда является многоэкстремальной. Кроме того, сложное поведение ЦФ в некоторых ориентациях объясняется тем, что при этих ориентациях система дисперсионных уравнений становится плохо обусловленной, соответствующая матрица – почти сингулярной, а вся задача в целом – некорректной.

Сложности, возникающие при поиске решений ВПАВ в пьезокристаллах, можно проиллюстрировать конкретным примером. На рис. 1, 2 показаны рассчитанные рельефы целевой функции  $F(V, \delta) = 0$  для среза кристалла ниобата лития  $\text{LiNbO}_3$  ориентации ( $0^\circ, -49^\circ, 0^\circ$ ), покрытого алюминиевым слоем ( $h = 0.01\lambda, \lambda$  – длина волны) в пространстве скоростей  $V$  и декремента затухания  $\delta$  при поиске ППАВ (рис. 1) и ВСППАВ (рис. 2) решений. Как видно из рисунков, рельефы ЦФ имеют достаточно сложный вид (множество глубоких узких локальных экстремумов). Данное обстоятельство ограничивает возможность применения многих известных в настоящее время процедур



**Рис. 1.** Рельеф целевой функции  $F(V, \delta)$  при поиске ППАВ решения в кристалле LiNbO<sub>3</sub> (0°, -49°, 0°).



**Рис. 2.** Рельеф целевой функции  $F(V, \delta)$  при поиске ВСППАВ решения в кристалле LiNbO<sub>3</sub> (0°, -49°, 0°).

глобального поиска [5, 6]. Методы перехода из одного локального минимума в другой почти всегда используют производные ЦФ, которые в ситуациях плоских плато малоэффективны. Методы, основанные на статистических моделях ЦФ и методы случайного поиска в ситуациях большого числа узких и глубоких экстремумов слишком сильно зависят от настраиваемых параметров, что при отсутствии априорной информации о поведении ЦФ делает их неработоспособными. Остается рассчитывать на отдельные реализации методов покрытий и методы направленного сканирования обла-

сти поиска. При выборе поисковых процедур необходимо учитывать также еще один специфический критерий эффективности. Это скорость решения задачи на ЭВМ. Поисковые процедуры должны быстро обрабатывать свою специфическую информацию. Требование высокой скорости работы поисковых процедур сводится к тому, чтобы программная реализация поисковой процедуры обладала таким быстродействием, при котором абсолютно больший процент времени решения оптимизационной задачи на ЭВМ приходился бы на выполнение модельной процедуры пользователя.

Ниже приведены краткие описания трех процедур поиска глобального экстремума ЦФ (3) при расчете основных характеристик ВПАВ.

1) Одной из возможных реализаций глобального поиска методом покрытий является процедура Хука–Дживса (HJS, Hooke–Jeeves Search) [3–5]. Метод Хука–Дживса представляет собой разновидность поиска локального экстремума методом конфигураций в пространстве. Однако данный метод можно приспособить также к поиску глобального экстремума ЦФ, осуществив глобальный перебор по детерминированной поисковой сетке в сочетании с локальным поиском из перспективных точек. При этом локальный поиск может быть выполнен методом Хука и Дживса с автоматическим подключением процедуры Муджеля в случае отказа метода конфигураций в овражных ситуациях [4]. Исследуемая область покрывается равномерной поисковой сеткой. Затем из произвольной точки области производится локальный поиск, приводящий к локальному экстремуму. Значения ЦФ в узлах поисковой сетки сравниваются со значением в найденном локальном экстремуме. В случае обнаружения точки, лучшей, чем ранее найденная, из этой точки осуществляется поиск, приводящий к новому возможно лучшему локальному экстремуму и т.д. В результате после завершения перебора по всей поисковой сетке, последний из найденных экстремумов будет глобальным. Отличительная особенность данной процедуры – его простота, что позволяет составить короткую программу, реализующую этот алгоритм. В процедуре HJS перебор выполняется хотя и по большому количеству точек, но только один раз и без всякой дополнительной обработки.

2) Другой реализацией глобального поиска методом покрытий является процедура Нельдера–Мида (NMS, Nelder–Meed Search). Эта процедура подразумевает задание сетки стартовых точек с последующим поиском из них локального экстремума на основе метода деформируемого многогранника [6]. Локальный поиск заключается в определении значений ЦФ в пробных точках, принадлежащих области поиска и являющихся вершинами некоторого многогранника. Выполнение специальных операций, позволяющих деформировать многогранник в пространстве изменения переменных и смещать его в область наиболее вероятного расположения экстремума позволяет в конечном итоге точно определять координаты этого экстремума. Характерна малая чувствительность к особенностям рельефа ЦФ: овраги и участки малого наклона успешно преодолеваются. Процедура надежно работает в пространстве размерности до 10, имея при этом весьма низкие затраты на поиск. В смысле организации глобального поиска реализуется конкуренция стартовых точек.

3) Одной из возможных реализаций неполного направленного сканирования области поиска является детерминированная процедура поиска глобального экстремума на дискретной сетке, задаваемой двоичным кодом Грея (GDS, Global Discrete Search) [7]. Характерной чертой рассматриваемой процедуры является дискретизация переменных. При этом все пространство оказывается покрыто регулярной сеткой, узлы которой характеризуют определенное состояние описываемого объекта. Шаг дискретизации является величиной, с точностью до которой может быть найден экстремум по каждой переменной. Дискретное состояние объекта может быть однозначно представлено двоичными номерами дискретных состояний по каждой из переменных, записанных последовательно. В рассматриваемой поисковой процедуре состояние объекта записывается в рефлексивном двоичном коде Грея [7]. Таким образом, задача поиска минимума сводится к комбинаторной задаче отыскания двоичного слова заданной длины, удовлетворяющего условию достижения наименьшего значения ЦФ. Работа поисковой процедуры заключается в создании множества пробных точек с регулируемой плотностью расположения относительно лучшей в конкретный момент точки. Специфическая обработка информации о значениях ЦФ в этих пробных точках позволяет осуществлять продвижение в область наиболее вероятного расположения глобального экстремума. Продвижение к экстремуму осуществляется не по рельефу ЦФ, а внутри облака, движущегося множеством всех своих точек в направлении предполагаемого расположения экстремума. Реализующая описанный алгоритм программа обеспечивает эффективную работу в пространстве высокой размерности (порядка 10), обеспечивая примерно линейный рост затрат на поиск от размерности решаемой задачи. В качестве настраиваемого параметра выступает лишь дискретность поискового пространства.

Сравнение используемых процедур поиска глобального экстремума ЦФ проводилось на примере поиска ВПАВ решений для скрытой поверхности пьезокристалла  $\text{LiNbO}_3$  ориентации  $(0^\circ, -49^\circ, 0^\circ)$ . Для задачи ВПАВ поиск глобального минимума ЦФ проводился в области 2 параметров: скорости  $V$  (км/с) и декремента затухания  $\delta$  (дБ/λ, λ – длина волны). Координаты начальной стартовой точки выбирались случайным образом. Требуемая точность вычисления координат экстремумов соответствовала точности данных вещественного типа на ЭВМ IBM PC.

В результате поиска процедурой HJS для задачи ППАВ после выполнения 281 вычисления ЦФ были найдены параметры: скорость  $V = 4.7515$  км/с, декремент затухания  $\delta = 2.4 \times 10^{-4}$  дБ/λ со значением ЦФ порядка  $1.2 \times 10^{-18}$ , а для задачи ВСППАВ после выполнения 4263 вычислений ЦФ были

найжены параметры:  $V = 8.314$  км/с,  $\delta = 0.531$  дБ/λ со значением ЦФ  $1.2 \times 10^{-18}$ , что в каждой из рассматриваемых задач соответствует глобально-оптимальному решению для соответствующего типа волны. Значительные затраты на поиск процедурой HJS объясняются высокой подробностью исходной поисковой сетки, служащей для старта процедуры локального поиска.

Для процедуры NMS поиск проводился из 10 стартовых точек. Их координаты соответствовали равномерной сетке, наложенной на область поиска. В ходе поиска для задачи ППАВ всего было выполнено 1510 вычислений ЦФ, что в среднем соответствует 151 вычислению ЦФ при одном локальном спуске. Все 10 спусков завершились в допустимой по точности окрестности глобально-оптимальной точки с конечными значениями ЦФ порядка  $10^{-17}$ – $10^{-19}$ . Для задачи ВСППАВ было выполнено 1700 вычислений ЦФ, что в среднем соответствует 170 вычислениям ЦФ при одном локальном спуске. В результате была продемонстрирована высокая вероятность попадания в бассейн глобального экстремума: 9 из 10 спусков завершились в допустимой по точности окрестности глобально-оптимальной точки с конечными значениями ЦФ порядка  $10^{-14}$ – $10^{-18}$ , и лишь один привел в точку ложного локального минимума.

В случае поиска процедурой GDS дискретизация переменных соответствовала требуемой точности вычисления координат глобального экстремума. Поиск проводился из 10 стартовых точек, программно сгенерированных на основе заданной начальной точки и разбросанных приблизительно равномерно в области поиска. В ходе поиска для задачи ППАВ всего было выполнено 2770 вычислений ЦФ, причем на поиск одного экстремума (или подтверждение уже найденного ранее) требовалось в среднем примерно 214 вычислений ЦФ, а на проверку обширности вновь найденного – примерно 630 вычислений ЦФ. При поиске из всех 10 стартовых точек был обнаружен глобальный экстремум. Для задачи ВСППАВ всего было выполнено 4915 вычислений ЦФ: на поиск экстремума требовалось в среднем примерно 304 вычисления ЦФ, а на проверку его обширности – примерно 625 вычислений ЦФ. При поиске из 7 стартовых точек был обнаружен глобальный экстремум, 3 из них закончились в точках ложных локальных минимумов. Это позволяет оценить надежность поиска глобального экстремума процедурой GDS в задачах рассматриваемого типа примерно в 85%, что при невысоких затратах на поиск является весьма высоким показателем. Приведенные результаты еще раз подтвердили, что поисковая процедура GDS обеспечивает быстрое продвижение к экстремуму сразу после старта из исходной точки и довольно медленное его уточнение. Затраты на уточнение могут в не-

сколько раз превосходить затраты на ориентировочное определение положения экстремума.

Анализ затрат на поиск глобального экстремума отобранными для решения задач акустоэлектроники процедурами подтверждает их достаточную для решения практических задач эффективность. Вместе с тем, процедура HJS, использующая частую сетку стартовых точек, в задачах более высокой размерности вполне может оказаться малоэкономной. При размерности поискового пространства 4–8 предпочтительнее применение процедуры NMS с редкой сеткой стартовых точек. Ее возможность продвигаться к экстремуму множеством пробных точек объема многогранника выигрывает в рассматриваемых задачах предпочтительнее любой стратегии поиска методами конфигураций. В задачах еще более высокой размерности самой эффективной оказывается процедура GDS. Однако в силу дискретного характера представления пространства поиска, пользователю приходится довольно тщательно подбирать эту дискретность. Слишком подробное представление ведет к неоправданным затратам на поиск, а слишком грубое грозит снижением надежности поиска глобального экстремума (высокой вероятностью его пропуска).

Поиск пространственных ориентаций, соответствующих оптимальному значению какого-либо параметра ПАВ или их линейной комбинации, может быть также эффективно выполнен описанными выше процедурами поиска глобального экстремума ЦФ. При этом глобальный поиск необходимо осуществлять по всем трем углам Эйлера. В данном случае ЦФ может быть сформирована в виде линейной комбинации основных параметров волны с индивидуальными весовыми (экспертными) коэффициентами, позволяющими варьировать вклад каждого слагаемого в величину ЦФ. Трудно рассчитывать, что существуют ориентации, для которых все параметры ПАВ одновременно принимают оптимальное значение. Более реально пытаться находить оптимум того параметра волны, который наиболее важен для данного конкретного применения [15]. Возможен также поиск некоего компромисса между несколькими параметрами волны, образующими ЦФ. Примером решения такой задачи могут служить результаты поиска максимальной величины коэффициента электромеханической связи  $K^2$  для ПАВ в пьезокристалле  $\text{LiNbO}_3$ . Используя описанные выше процедуры поиска экстремума ЦФ, были рассчитаны линии равной величины  $K^2$  в области углов Эйлера:  $f_1 = 0^\circ$ ,  $f_2 = 0^\circ$ – $180^\circ$ ,  $f_3 = 95^\circ$ – $180^\circ$ . Как видно из рисунка, область максимальной величины  $K^2$  в данном случае находится в районе углов Эйлера:  $f_2 = 60^\circ$ – $95^\circ$ ,  $f_3 = 95^\circ$ , а также в области углов Эйлера:  $f_2 = 30^\circ$ – $45^\circ$ ,  $f_3 = 160^\circ$ – $180^\circ$ , и имеет значение от 4% до 5%.

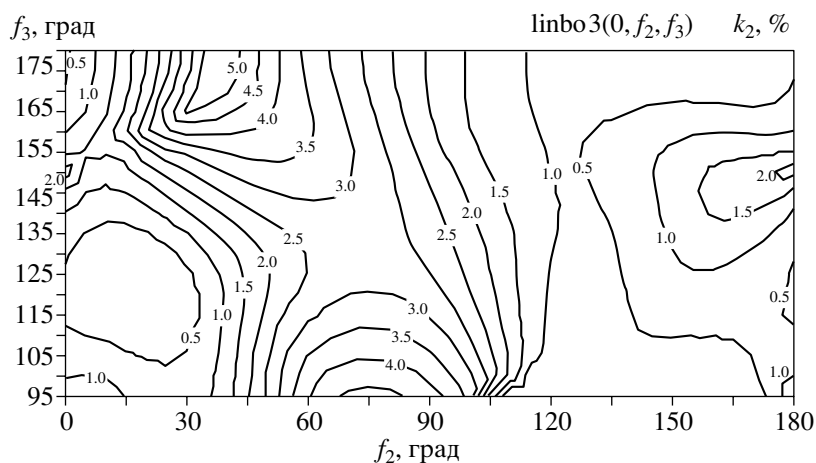


Рис. 3. Линии равной величины  $K^2$  в кристалле  $\text{LiNbO}_3$  ( $f_1 = 0^\circ$ ,  $f_2 = 0^\circ\text{--}180^\circ$ ,  $f_3 = 95^\circ\text{--}180^\circ$ ).

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о пригодности описанных выше процедур для поиска ПАВ и ВПАВ решений в пьезокристаллах. Предложен метод численного расчета характеристик ПАВ и ВПАВ, основанный на применении различных процедур поиска глобального экстремума функции многих переменных. Процедуры поиска глобального экстремума ЦФ использовались: для минимизации функции граничных условий  $F(V, \delta)$ ; для поиска ориентаций в пространстве, соответствующих оптимальным значениям параметров ПАВ и ВПАВ.

Рассмотрены особенности различных методов поиска глобального экстремума ЦФ. Показано, что ни один из поисковых методов не обладает по отношению к другим такими преимуществами, которые позволяли бы считать его универсальным средством решения любых задач. В результате проведенных расчетов можно сделать вывод, что при поиске ВПАВ решений, а также для поиска оптимальных ориентаций для ПАВ в кристаллах целесообразно пользоваться целым набором различных процедур поиска глобального экстремума ЦФ. При этом вероятность нахождения истинных решений резко увеличивается.

Весьма перспективной представляется идея повышения эффективности решения поисковых задач за счет диалогового режима взаимодействия с ЭВМ. Так, гибко выбирая достаточно эф-

фективные процедуры поиска на соответствующих этапах решения задачи и обладая широким набором возможностей, можно весьма быстро добиться требуемых результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фарнелл Дж. Типы и свойства поверхностных акустических волн. В сб. Поверхностные акустические волны / Под ред. Олинера А. М.: Мир, 1981.
2. Dvoesherstov M.Yu., Cherednick V.I., Chirimanov A.P., Petrov S.G. A method of search for SAW and Leaky waves based on numerical global multi-variable procedures // SPIE. 1999. V. 3900. P. 283–289.
3. Уайлд Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967.
4. Hill I.D. A Search Technique for Multimodal Surfaces // IEEE Trans. 1969. V. SSC–S. № 1. P. 2.
5. Жилинскас А. Глобальная оптимизация. Вильнюс: Мокслас, 1986.
6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
7. Ботенков А.М., Вазин В.А., Воинов Б.С., Костерин В.В., Литвинов В.Н., Савин В.А., Черкасова Н.Г. Диалоговый алгоритм синтеза // Препринт 8711. М.: РТИ АН СССР, 1988.
8. Шаскольская М.П. Акустические кристаллы. М.: Наука, 1982. С. 632.
9. Cunha M.P. High velocity pseudo surface waves (HVPSW): Further insight // Proc. IEEE Ultrasonics Symp. 1997. P. 97–106.